# EXPLICATIO ANALYTICA

## CONSTRUCTIONIS UNIVERSALIS SUPERFICIERUM SECUNDI ORDINIS

QUAE ANALOGA EST CONSTRUCTIONI CURVAE SECUNDI ORDINIS

## PER DIRECTRICEM ET FOCUM ILLI RESPONDENTEM.

---

**DISSERTATIO MATHEMATICA,**

QUAM

AD SUMMOS IN PHILOSOPHIA HONORES RITE CAPESSENDOS

EX AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS

AUCTORITATE

IN

**UNIVERSITATE LITERARUM BONNENSI**

UNA CUM ADIECTIS THESIBUS

ANTE DIEM V. CAL. SEPTEMBRES

PUBLICE DEFENDET

**FABIANUS CAROLUS OTTOCAR A FEILITZSCH**

THURINGUS.

---

OPPONENTIBUS:

IOANNE FEDERATH, SEM. PHYS. SOD. ORD.
GUSTAVO A SZCZEPAŃSKI, PHIL. STUD.
HENRICO BRUNN, SEM. PHIL. SOD. SENIOR.

---

**BONNAE**

TYPIS CAROLI GEORGII.

MDCCCXLI.

VIRO ILLUSTRI, SUMME REVERENDO

# IULIO PLÜCKER

PHILOSOPHIAE DOCTORI, MATHEMATICAE PROFESSORI PUBLICO ORDINARIO,
SEMINARII PHYSICI RECTORI ETC. ETC.

PRAECEPTORI DILECTISSIMO MERITISSIMO

PIO GRATOQUE ANIMO

D. D. D.

SCRIPTOR.

# PRAEFATIO.

Quod saepissime accidere solet iis, qui necessitate quadam coacti ad scribendum animum appellunt, ut multam operam in sola materia scribendi quaerenda frustra consumant, id mihi quoque accidisse libere profitendum est. Nam cum pari amore tractassem et physicas et mathematicas disciplinas, volui utrasque habere partem in hac prima mea dissertatione. Sed superabat alia quaestio vires meas, in alia opus erat nimis amplis praeparationibus, experimentis in alia e quibus, quid redundaret incertum erat. Quae cum ita essent, nihil mihi potuit evenire magis ex voluntate quam quod **Iulius Plücker** vir clarissimus, praeceptor dilectissimus eo auxit, qua semper in me usus est, benignitatem, ut ad hanc speciosam quaestionem e geometria analytica desumtam animum meum adverteret. De qua quae conscripsi, quantum fieri potuit diligentissime, lectori benevolo propono; vellem critici acri iudicio subiicere possem. Quod fortasse liceret, si liceret sequi Horatii praeceptum: „nonum prematur in annum.“ Id ipsum autem, cum sit incertum, potius dicamus: „audaces fortuna iuvat.“ Iam igitur adsum de dissertatione, quid iudicetur, ut audiam; nec non ut theses in fine adiectas defendam. —

**R**ecta data et puncto, locum geometricum omnium punctorum sitorum intra planum huius rectae et puncti, quorum distantiae ab hac recta et hoc puncto sunt in ratione constanti, esse curvam secundi ordinis, satis est notum. Iam sequamur huius thesis analogiam et videbimus:

Recta data et puncto, locum geometricum omnium punctorum in spatio, quorum distantiae ab hac recta, parallela plano dato, et quorum distantiae ab hoc puncto sunt in constanti ratione, esse superficiem secundi ordinis.

## 1.

Situs omnium punctorum per distantias a tribus planis fixis inter se normalibus determinetur, quorum intersectiones axis X, axis Y, axis Z denominentur, hisque parallelae distantiae uniuscuiusque puncti a planis istis per coordinatas x, y, z, ut solent geometri, signentur.
Sit linea data axis Z; in axi X punctum datum sit situm, cuius coordinatae sint $(x_1, o, o)$; utrique axi sit normalis axis Y. Aequatio, qua planum datum significatur, sit haecce:

$$ax + by + cz = o. \qquad 1.$$

Quaevis recta, quam in universum significamus formulis

$$x = mz + m_1; \qquad y = nz + n_1, \qquad 2.$$

parallela est plano, cuius aequatio data est sub N. 1. si:

$$am + bn + c = o. \qquad 3.$$

Porro, si coordinatae puncti, cuius locum quaerimus geometricum, per $(x', y', z')$ significantur, et si volumus rectam sub N. 2. datam ire per hoc punctum, formula 2. transit in

$$x' = mz' + m_1; \qquad y' = nz' + n_1. \qquad 4.$$

Si deinde statuimus eandem lineam ire per axem Z, cuius $x = o$, $y = o$, transit formula 2. in

$$o = mz + m_1; \qquad o = nz + n_1. \qquad 5.$$

Cuius rectae mensura D' intra puncta $(x', y', z')$ et $(o, o, z)$ omnino est definita formula

$$D'^2 = x'^2 + y'^2 + (z' - z)^2,$$

in quam valor signi z e N. 3. et 4. et 5. est inserendus. E 4. et 5. patet

$$x = m(z' - z); \qquad y = n(z' - z);$$

secundum 3. est $n = -\frac{am+c}{b}$, ergo

$$m = \frac{x'}{z'-z} = -\frac{by'+c(z'-z)}{a(z'-z)}$$

ex quo

$$z' - z = -\frac{ax'+by'}{c}$$

et proin

$$D'^2 = x'^2 + y'^2 + \left\{\frac{ax+by}{c}\right\}^2$$
$$= \frac{(a^2+c^2)x'^2 + (b^2+c^2)y'^2 + 2abx'y'}{c^2}. \qquad 6.$$

Mensura D lineae intra punctum (x', y', z') et punctum ($x_1$, o, o) significata est formula
$$D^2 = (x'-x_1)^2 + y'^2 + z'^2. \qquad 7.$$

Secundum thesim propositam, cum punctum (x', y', z') debeat distare ab axi Z et a puncto dato ($x_1$, o, o) certa ratione, liceat $1:\mu$, sequitur
$$\mu^2 D'^2 = D^2$$
aut secundum 6. et 7.
$$\frac{\mu^2}{c^2}\left\{(a^2+c^2)x'^2 + (b^2+c^2)y'^2 + 2abx'y'\right\} = x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2x_1x' + x_1^2. \qquad 9\,a.$$
Quae autem aequatio cum valeat in omnibus punctis, quibus conveniunt conditiones superiores, omittere possumus accentus quantitatum x, y, z, et habemus, si simul transponimus, aequationem:
$$\{(\mu^2-1)c^2+\mu^2a^2\}x^2 + \{(\mu^2-1)c^2+\mu^2b^2\}y^2 + c^2z^2 + 2\mu^2abxy + 2c^2x_1x - c^2x_1^2 = o. \qquad 9\,b.$$

## 2.

Transformentur deinde coordinatae aequationis 9. §. antecedentis ita, ut membra $2\mu^2abxy$ et $2c^2x_1x$ excidant. Quo consilio si ponimus $x = x\cos\varphi - y\sin\varphi$ et $y = y\cos\varphi + x\sin\varphi$, et sumimus $tg\varphi = \frac{b}{a}$ aut $= \frac{-a}{b}$, excidit membrum $2\mu^2abxy$. Si $tg\varphi = \frac{b}{a}$, i. e. si novum axem Y movemus in intersectionem plani XY et plani sub N. 1. §. 1. dati, axibus eodem modo inclinatis, aequatio ita mutatur
$$\{\mu^2(a^2+b^2+c^2)-c^2\}x^2 + (\mu^2-1)c^2y^2 - c^2z^2 + 2\frac{c^2x_1a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}x - 2\frac{c^2x_1b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}y - c^2x_1^2 = o.$$
In qua si ponimus $x = x+\alpha$, $y = y+\beta$, et
$$\alpha = -\frac{ac^2x_1}{\{\mu^2(a^2+b^2+c^2)-c^2\}\sqrt{(a^2+b^2)}} \qquad 1\,a.$$
et
$$\beta = \frac{bx_1}{(\mu^2-1)\sqrt{(a^2+b^2)}} \qquad 1\,b.$$
habemus
$$\{\mu^2(a^2+b^2+c^2)-c^2\}x^2 + (\mu^2-1)c^2y^2 - c^2z^2 - \mu^2c^2x_1^2\frac{\mu^2(a^2+b^2+c^2)-(a^2+c^2)}{(\mu^2-1)\{\mu^2(a^2+b^2+c^2)-c^2\}} = o,$$
sive, si hanc aequationem dividimus per $c^2$, et numeratorem et denominatorem membri constantis per $(a^2+b^2+c^2)$, habemus:
$$\left\{\mu^2\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2} - 1\right\}x^2 + (\mu^2-1)y^2 - z^2 - \mu^2x_1^2\frac{\mu^2 - \frac{a^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}}{(\mu^2-1)\left\{\mu^2 - \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}\right\}} = o. \qquad 2.$$

Iam $\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$ est quadratum cosinus eius anguli, qui efficitur normali in plano 1. §. 1. et linea parallela axi Z. Quem angulum si denominamus $\zeta$ est
$$\cos^2\zeta = \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}. \qquad 3.$$

Est porro $\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$ quadratum cosinus eius anguli, qui efficitur eadem normali et linea parallela axi Y primo. Quem angulum si denominamus $v$, est

$$\sin^2 v = 1 - \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{a^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}. \qquad 4.$$

Quos valores si inserimus in aequationem 2. transit in hanc

$$\frac{\mu^2-\cos^2\zeta}{\cos^2\zeta}x^2+(\mu^2-1)y^2-z^2-\mu^2 x_1{}^2\frac{\mu^2-\sin^2 v}{(\mu^2-1)(\mu^2-\cos^2\zeta)}=o$$

sive in

$$\frac{\cos^2\zeta-\mu^2}{\cos^2\zeta}x^2+(1-\mu^2)y^2+z^2-\mu^2 x_1{}^2\frac{\sin^2 v-\mu^2}{(1-\mu^2)(\cos^2\zeta-\mu^2)}=o. \qquad 5.$$

Constat autem satis, posse hanc aequationem esse loco aequationis universalis superficierum secundi ordinis *), nisi forte in immensum crescit membrum constans, quod fit, si aut coëfficiens quantitatis $x^2$, aut quantitatis $y^2$ evanescit. Alterum si occurrit, aequatio 5. ita transformetur, ut initium coordinatarum ponatur in altero puncto superficiei, in quibus axis X eam secat, quod fit si statuitur $x = x \mp \frac{\mu x_1 \cos\zeta}{\cos\zeta-\mu^2}\sqrt{\left(\frac{\sin^2 v-\mu^2}{1-\mu^2}\right)}$, et aequatio mutatur in

$$\frac{\cos^2\zeta-\mu^2}{\cos^2\zeta}x^2+(1-\mu^2)y^2+z^2\mp 2\frac{\mu x_1}{\cos\zeta}\sqrt{\left(\frac{\sin^2 v-\mu^2}{1-\mu^2}\right)}\,x=o. \qquad 6.$$

Alterum si occurrit, aequatio 5. ita transformetur, ut initium coordinatarum ponatur in altero puncto superficiei, in quibus axis Y eam secat, quod fit si statuitur $y = y \mp \frac{\mu x_1}{1-\mu^2}\sqrt{\left(\frac{\sin^2 v-\mu^2}{\cos^2\zeta-\mu^2}\right)}$, quare aequatio mutatur in

$$\frac{\cos^2\zeta-\mu^2}{\cos^2\zeta}x^2+(1-\mu^2)y^2+z^2\mp 2\mu x_1\sqrt{\left(\frac{\sin^2 v-\mu^2}{\cos^2\zeta-\mu^2}\right)}\,y=o. \qquad 7.$$

## 3.

A. Ipsa natura aequationis 5. §. praec. docet superficies, quas illa aequatio complectitur, symmetre esse ad plana coordinatarum; quod cum sit dictum de coordinatis orthogonalibus, siti sunt axes principales superficiei in axibus coordinatis. In centro superficierum situm est initium coordinatarum, quoniam $+x$, $+y$, $+z$ ad arbitrium mutari potest cum $-x$, $-y$, $-z$ sine ullo aequationis detrimento.

Hac vero aequatione

$$\frac{\cos^2\zeta-\mu^2}{\cos^2\zeta}x^2+(1-\mu^2)y^2+z^2=\mu^2 x_1{}^2\frac{\sin^2 v-\mu^2}{(1-\mu^2)(\cos^2\zeta-\mu^2)} \qquad 1.$$

significantur pro variis valoribus quantitatum constantium hae penitus diversae superficies.

1. Si $\mu^2<\cos^2\zeta$, omnia membra partis sinistrae sunt positiva; significaturque ea aequatione, si praeterea

1 *a*. $\mu^2<\sin^2 v$ — ellipsoides sive superficies elliptica. Ita enim dextra aequationis pars fit positiva, quam ob causam sectiones omnes planorum coordinatarum et planorum iis parallelorum, quod remota sunt ab iis usque ad resp. $z = \pm\mu x_1\sqrt{\left(\frac{\sin^2 v-\mu^2}{(1-\mu^2)(\cos^2\zeta-\mu^2)}\right)}$,

*) Cf. Introductio in analysin infinitorum auctore L. Eulero. Appendix §. 115.

$y = \pm \frac{\mu x_1}{(1-\mu^2)} \sqrt{\left(\frac{\sin^2 v-\mu^2}{\cos^2\zeta-\mu^2}\right)}$, $x = \pm \frac{\mu x_1}{\cos^2\zeta-\mu^2} \sqrt{\left(\frac{\sin^2 v-\mu^2}{1-\mu^2}\right)}$, sunt ellipses, quoad remotiores sunt, curvae imaginariae. Quia $1 < \frac{1}{1-\frac{\mu^2}{\cos^2\zeta}}$ et $\frac{1}{1-\frac{\mu^2}{\cos^2\zeta}} > \frac{1}{1-\mu^2}$, ille axis elliptoidis, qui situs est in axi Z est minimus, qui situs est in axi X maximus. — Si $\cos^2\zeta = 1$, etiam est $\sin^2 v = 1$, sive si $a^2 = o$, et $b^2 = o$, elliptoides fit rotatoria sive **s p h a e r o i d e s**, nam sectiones plani XY et ei parallelorum sunt circuli, omnesque planorum quae eunt per axem Z, ellipses aequales, quarum axes minores sunt siti in axi Z.

A n n o t a t i o I. Aequatio 1. non continet sphaerae aequationem, quoniam coëfficientes quantitatum $x^2$ et $y^2$ non possunt fieri aequales coëfficienti quantitatis $z^2$.

A n n o t a t i o II. Si $\mu^2 < \cos^2\zeta$, non simul potest esse $= \sin^2 v$ nec $> \sin^2 v$, quia semper $\cos^2\zeta$ (sive $\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$) minor est vel aequalis quantitati $\sin^2 v$ (sive $\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}$).

II. Si in aequatione 1. $\mu^2 > \cos^2 z$ sed $\mu^2 < 1$, coëfficiens quantitatis $x^2$ fit negativus, ii quantitatum $y^2$ et $z^2$ restant positivi, significaturque aequatione, si praeterea

2 *a*. $\mu^2 < \sin^2 v$ — s u p e r f i c i e s e l l i p t i c o - h y p e r b o l i c a. Ita enim dextra pars aequationis fit negativa, quam ob causam plana XY et XZ ac his parallela secant superficiem in hyperbolis, quarum axes reales paralleli sunt axi X; planum YZ eique parallela, quoad remota sunt ab illo usque ad $x = \pm \frac{\mu x_1 \cos\zeta}{\mu^2-\cos^2\zeta} \sqrt{\left(\frac{\sin^2 v-\mu^2}{1-\mu^2}\right)}$, in curvis imaginariis, et quoad remotiora in ellipsibus. — Quia $\frac{1}{1-\mu^2} > 1$, valor axis imaginarii, qui situs est in axi Y maior est, quam qui situs est in axi Z; cum autem $\frac{1}{\frac{\mu^2}{\cos^2\zeta}-1} < 1$ (si $\mu^2 > 2\cos^2\zeta$), et $\frac{1}{\frac{\mu^2}{\cos^2\zeta}-1} > \frac{1}{1-\mu^2}\left(\text{si } \mu^2 < \frac{2\cos^2\zeta}{1+\cos^2\zeta}\right)$, ergo etiam $\frac{1}{\frac{\mu^2}{\cos^2\zeta}-1} > 1$ et simul $< \frac{1}{1-\mu^2}$ esse possit, incertum est, quomodo valor axis realis se habeat ad valores absolutos axium imaginariorum.

3. $\mu^2 = \sin^2 v$ — c o n u s. Ita enim evanescit pars dextra aequationis, secant igitur plana XY et XZ superficiem in binis rectis, omnia his parallela in hyperbolis; planum YZ in uno puncto, et omnia huic parallela in ellipsibus. Coni axis situs est in axi X, et quoniam $\frac{1}{1-\mu^2} > 1$, axes maiores ellipsium, quarum mentio fiebat, axi Y sunt paralleli.

4 *a*. $\mu^2 > \sin^2 v$ — s u p e r f i c i e s h y p e r b o l i c o - h y p e r b o l i c a. Ita enim pars dextra aequationis fit positiva; plana XY et XZ ac his parallela, quoad remota sunt ab iis resp. usque ad $z = \pm \mu x_1 \sqrt{\left(\frac{\mu^2-\sin^2 v}{(1-\mu^2)(\mu^2-\cos^2\zeta)}\right)}$ et $y = \pm \frac{\mu x_1}{1-\mu^2} \sqrt{\left(\frac{\mu^2-\sin^2 v}{\mu^2-\cos^2\zeta}\right)}$, secant superficiem in hyperbolis, quarum axes imaginarii paralleli sunt axi X; haec plana ipsa in binis rectis; quoad remotiora in hyperbolis, quarum axes reales paralleli sunt axi X; atque planum YZ et omnes illi parallela in ellipsibus. Quia $\frac{1}{1-\mu^2} > 1$, realis axis superficiei, qui situs est in axi Y, maior est eo, qui situs est in axi Z; valor autem absolutus axis imaginarii in axi X siti, ob causas similes iis, quae valuerant in axi reali superficiei elliptico-hyperbolicae, quomodo se habeat ad valores axium realium, est incertum.

Annotatio. Non possunt hac superficies fieri rotatoriae, quoniam ob $\mu^2 > \cos^2\zeta$ et $\mu^2 < 1$ coëfficientes quantitatum $x^2$, $y^2$, $z^2$ semper restant inaequales.

III. Si in aequatione 1. $\mu^2 > 1$, coëfficientes quantitatum $x^2$ et $y^2$ et dextra pars fiunt negativi, significaturque hac aequatione

4 *b*. superficies hyperbolico hyperbolica. Planum XY enim et omnia huic parallela secant superficiem in ellipsibus; plana XZ et YZ, omniaque his parallela, quoad remota sunt ab iis resp. usque ad $y = \pm \frac{\mu x_1}{\mu^2-1} \sqrt{\left(\frac{\mu^2-\sin^2 v}{\mu^2-\cos^2\zeta}\right)}$ et $x = \pm \frac{\mu x_1 \cos\zeta}{\mu^2-\cos^2\zeta} \sqrt{\left(\frac{\mu^2-\sin^2 v}{\mu^2-1}\right)}$ in hyperbolis, quarum axes imaginarii paralleli sunt axi Z; haec plana ipsa in binis rectis; quoad remotiora in hyperbolis, quarum axes reales paralleli sunt axi Z. Quia porro $\frac{1}{\frac{\mu^2}{\cos^2\zeta} - 1} < \frac{1}{\mu^2-1}$, axis realis hyperbolicae huius superficiei, qui est situs in axi X, minor est, quam, qui situs est in axi Y; cum autem non satis sit constitutum, quomodo se habeat $\mu : 1$, eodem modo incertum est, quomodo se habeat valor absolutus axis imaginarii ad valorem absolutum utriusque axis realis.

Annotatio. Quoniam, si insuper est $\cos^2\zeta = 1$, coëfficiens quantitatis $x^2$ aequalis est coëfficienti quantitatis $y^2$, haec superficies fit rotatoria; nam sectiones omnes et plani XY et ei parallelorum sunt circuli, et omnes planorum, in quibus situs est axis Z, hyperbolae inter se aequales.

IV. Si $\sin^2 v$ (sive $\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}$) $= 1$, i. e. si $b^2 = o$, intersectio plani dati (sub 1. §. 1.) et plani XY incidit in axem Y primum, transit aequatio in

$$\frac{\cos^2\zeta-\mu^2}{\cos^2\zeta} x^2 + (1-\mu^2)y^2 + z^2 = \frac{\mu^2 x_1^2}{\cos^2\zeta-\mu^2}$$

significaturque ea, si praeterea

1 *b*. $\mu^2 < \cos^2\zeta$ — superficies elliptica, ut sub N. 1 *a*.

2 *b*. $\mu^2 > \cos^2\zeta$ et $\mu^2 < 1$ — superficies elliptico-hyperbolica, ut sub N. 2 *a*.

5. $\mu^2 = 1$ — cylindrus hyperbolicus. Ita enim coëfficiens quantitatis $x^2$ et dextra pars fiunt negativi et quantitatis $y^2$ coëfficiens evanescit; itaque secant omnia plana parallela plano XZ superficiem in hyperbolis aequalibus aequaliterque sitis atque ipsum, quarum axes reales paralleli sunt axi X. Cylindri axis situs est in axi Y, cum aequatio non pendeat ab y. Unicuique y exstant singula centra, ergo superficies innumerabilia habet centra in axi cylindri sita.

4 *c*. $\mu^2 > 1$ — superficies hyperbolico-hyperbolica, ut sub III.

V. Si in aequatione 1. $\sin^2 v = \cos^2\zeta$, sive $\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$, i. e. si $a^2 = o$, intersectio plani dati (sub 1. §. 1.) et plani XY incidit in primum axim X. Fit deinde (in §. 2.) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{o} = \infty$, ergo $\varphi = 90°$, i. e. aequatio superficiei ita transformata est, ut systema axium X et Y circumagatur 90°, qua de causa hic axis Y incidit in axem X primum. Aequatio transit in

$$\frac{\cos^2\zeta-\mu^2}{\cos^2\zeta} x^2 + (1-\mu^2)y^2 + z^2 = \frac{\mu^2 x_1^2}{1-\mu^2}$$

significaturque ea, si praeterea

1 *c*. $\mu^2 < \cos^2\zeta$ — superficies elliptica, ut sub 1 *a*.

6. $\mu^2 = \cos^2\zeta$ — **cylindrus ellipticus.** Ita enim excidit membrum in quo est $x^2$, membra reliqua restant positiva; itaque secant planum YZ omniaque huic parallela superficiem in aequalibus aequaliterque sitis ellipsibus, quarum maiores axes, quia $\frac{1}{1-\mu^2} > 1$ paralleli sunt axi Y. Cylindri axis situs est in axi X, cum aequatio non pendeat ab x. Unicuique x extant singula centra, ergo innumerabilia superficies habet centra, quae omnia sita sunt in axi cylindri.

4 *d.* $\mu^2 > \cos^2\zeta$ et $\mu^2 < 1$ — superficies hyperbolico-hyperbolica, ut sub III.

B. Si eo, quod coëfficiens quantitatis aut $x^2$ aut $y^2$ evanescit, membrum constans aequationis 5. in §. 2. in immensum crescit, hac aequatione uti iam non possumus, cum et axes superficiei crescant in immensum, itaque centrum e quo oriuntur coordinatae immenso intervallo distat a superficie. Utendum est igitur iis aequationis transformationibus, quas habemus sub 6. et 7. in §. 2. Erat autem altera haecce:

$$\frac{\cos^2\zeta-\mu^2}{\cos^2\zeta}x^2+(1-\mu^2)y^2+z^2\mp 2\frac{\mu x_1}{\cos\zeta}\sqrt{\left(\frac{\sin^2\upsilon-\mu^2}{1-\mu^2}\right)}\,x = 0. \qquad 2.$$

Cuius aequationis natura demonstrat, superficies ea significatas symmetre esse ad plana et XY et XZ, ergo, cum sint orthogonales coordinatae, unum axem principalem situm esse in axi X.

I. Si $\mu^2=\cos^2\zeta$ transit aequatio 2. in

$$(1-\cos^2\zeta)y^2+z^2\mp 2x_1\sqrt{\left(\frac{\sin^2\upsilon-\cos^2\zeta}{1-\cos^2\zeta}\right)}\,x = 0 \qquad 3.$$

significaturque ea, si praeterea

7 *a.* $\sin^2\upsilon>\cos^2\zeta$ sed $\sin^2\upsilon<1$ — **superficies elliptico-parabolica.** Sectiones enim superficiei et omnium planorum parallelorum plano YZ, quoad {positiva / negativa} *) quantitas est x, sunt ellipses, quae degenerant in punctum in plano YZ ipso; sectiones planorum XY et XZ, omniumque his parallelorum sunt parabolae, quarum axes paralleli sunt axi X {positivarum / negativarum}.

8. $\sin^2\upsilon = \cos^2\zeta$ — **recta**, sita in axi X, quoniam aequationi secundum has conditiones satisfieri non potest nisi $y = 0$ et $z = 0$.

7 *b.* $\sin^2\upsilon = 1$ et $\cos^2\zeta < 1$ — superficies elliptico parabolica, similiter atque sub 9 *a.*

9 *a.* $\sin^2\upsilon = 1$ et $\cos^2\zeta = 1$ — **cylindrus parabolicus.** Quibus conditionibus satisfit, si $a^2=0$ et $b^2=0$, i. e. si planum datum (sub N. 1. §. 1.) est parallelum plano XY. Mutaturque aequatio in

$$z^2 \mp 2x_1x = 0$$

et demonstrat, omnes sectiones planas parallelas plano XZ formare aequales aequaliterque sitas parabolas, ut ipsius plani XZ, quarum parabolarum axes sunt paralleli axi X {positivarum / negativarum}.

II. Si volumus esse $\mu^2 = 1$, utendum est transformatione N. 7. §. 2. aequationis principalis superficierum secundi ordinis. Quod si ponimus in

$$\frac{\cos^2\zeta-\mu^2}{\cos^2\zeta}x^2+(1-\mu^2)y^2+z^2\mp 2\mu x_1\sqrt{\left(\frac{\sin^2\upsilon-\mu^2}{\cos^2\zeta-\mu^2}\right)}\,y = 0 \qquad 4.$$

*) prout valet signum superius aut inferius eius membri aequationis 3., quod continet x.

transit in $$- \frac{1-\cos^2\zeta}{\cos^2\zeta} x^2 + z^2 \mp 2x_1 \sqrt{\left(\frac{1-\sin^2 v}{1-\cos^2\zeta}\right)}\, y = 0. \qquad 5.$$

Cuius aequationis natura demonstrat, superficies ea significatas symmetre esse ad plana XY et YZ, ergo, cum sint orthogonales coordinatae, unum axem principalem situm esse in axi Y. Significaturque ea aequatione, si praeterea

10 *a*. $\sin^2 v < 1$ et $\cos^2\zeta < 1$ — superficies hyperbolico-parabolica. Planum XZ enim secat superficiem in duabus rectis, omnia plana huic parallela in hyperbolis, quarum axes $\left\{\begin{matrix}\text{reales}\\ \text{imaginarii}\end{matrix}\right\}$ si positiva est quantitas Y, axi Z, si negativa est, axi X parallela sunt; planum XY et huic parallela secat eam in parabolis, quarum centrum infinite distans est in parte $\left\{\begin{matrix}\text{negativarum}\\ \text{positivarum}\end{matrix}\right\}$ y; atque planum YZ et huic parallela secant eam in parabolis, quarum centrum infinite distans est in parte $\left\{\begin{matrix}\text{positivarum}\\ \text{negativarum}\end{matrix}\right\}$ quantitatum y.

10 *b*. $\sin^2 v = \cos^2\zeta$ (tamen $< 1$) — superficies hyperbolico parabolica, similiter ac sub 11 *a*.

9 *b*. $\sin^2 v = 1$ et $\cos^2\zeta = 1$, idem valet, quod sub 9 *a*., habemus ergo eundem cylindrum parabolicum.

C. Praeter quantitates constantes $\mu^2$, $\cos^2\zeta$, $\sin^2 v$ mutari quoque potest $x_1^2$. Non potest autem in universum eiusmodi mutatio vim habere nisi in dimensiones superficierum, quum $x_1^2$ non inveniatur nisi in membro constanti. Peculiares autem habemus casus, si $x_1 = 0$; significaturque aequationibus 1. 3. 4. si praeterea

11. $\mu^2 < \cos^2\zeta$ — superficies elliptica, cuius axes sunt infinite parvi, sive punctum.

3 *b*. $\mu^2 > \cos^2\zeta$ — conus, cuius axis est situs in axi X, si $\mu^2 < 1$ (cfr. 3 *a*.), cuiusque axis situs in axi Z, si $\mu^2 > 1$.

8 *b*. $\mu = \cos^2\zeta$ — recta, ut sub N. 8.

12. $\mu^2 = 1$ — plana duo se intersecantes. Aequatio enim transit in

$$- \frac{1-\cos^2\zeta}{\cos^2\zeta} x^2 + z^2 = 0$$

dissolviturque in duas aequationes primi ordinis:

$$\sqrt{\left(\frac{1-\cos^2\zeta}{\cos^2\zeta}\right)}\, x + z = 0 \ \text{et}\ \sqrt{\left(\frac{1-\cos^2\zeta}{\cos^2\zeta}\right)}\, x - z = 0.$$

Quae aequationes, quum non pendeant ab y et egeant membro constanti, plana, quae definiunt, se secant in axi Y.

13. Denique si $\mu^2 = 1$ et $\cos^2\zeta = 1$ — planum unum, quod incidit in planum XY, quum transeat aequatio in $z = 0$.

Quae diximus in paragrapho illa sint collata in breviario hocce.

casus peculiares si intercedunt

| | | $\sin^2 v = \cos^2 \zeta$ | $\sin^2 v = 1$ | |
|---|---|---|---|---|
| $\mu^2 < \cos^2 \zeta$ | $\mu^2 < \sin^2 v \begin{cases} x_1^2 > o \\ x_1^2 = o \end{cases}$ | super . . . . . ficies<br>punc . . . . . . . | elliptica.<br>. tum. | |
| $\mu^2 = \cos^2 \zeta$ | | $x_1^2 > o$ cylindrus ellipticus<br>$x_1^2 = o$ recta. | | $\sin^2 v \begin{cases} > \cos^2 \zeta \\ \leq 1 \end{cases}$ et $x_1^2 > o$. supf. elliptico-parabolica.<br>$\left.\begin{array}{l}\sin^2 v = \cos^2 \zeta \text{ aut} \\ x_1^2 = o\end{array}\right\}$ recta.<br>$\left.\begin{array}{l}\sin^2 v = 1 \text{ et} \\ \cos^2 \zeta = 1\end{array}\right\}$ et $x_1^2 > o$ cylindrus parabolicus. |
| $\mu^2 > \cos^2 \zeta$ sed $< 1$ | $\left.\begin{array}{l}\mu^2 < \sin^2 v \\ \text{et } x_1^2 > o\end{array}\right\}$ supf. elliptico-hyperbolica<br>$\left.\begin{array}{l}\mu^2 = \sin^2 v \text{ et } x_1^2 \geq o \\ \text{aut} \\ \mu^2 \gtrless \sin^2 v \text{ et } x_1^2 = o\end{array}\right\}$ c<br>$\mu^2 > \sin^2 v$ et $x_1^2 > o$, s | o . . . . . . . . . .<br>uperficies hyperbolico-hyperbolica. | $x_1^2 > o$ superficies elliptico-hyperbolica.<br>. nus. | |
| $\mu^2 = 1$ | | $x_1^2 > o$, superficies hyperbolico-parabolica<br>$x_1^2 = o$, 2 plana. | $x_1^2 > o$ cylindrus hyperbolicus.<br>$x_1^2 = o$ 2 plana | $\left.\begin{array}{l}\sin^2 v < 1 \text{ et } \cos^2 \zeta < 1 \\ \text{aut} \\ \sin^2 v = \cos^2 \zeta (< 1)\end{array}\right\}$ et $x_1^2 > o$ supf. hyperbolico parabolica.<br>$x_1^2 = o$ 2 plana<br>$\sin^2 v = 1$ et $\cos^2 \zeta = 1$ et $x_1^2 > o$ cylind. parab.<br>$\cos^2 \zeta = 1$ et $x_1^2 = o$ 1 planum. |
| $\mu^2 > 1$ | $x_1^2 > o$ superficies hyper<br>$x_1^2 = o$ co . . . . . . | bolico - hyper . . .<br>. . . . . . . . . . | bolica.<br>nus. | |

## 4.

Quaeritur nunc, quid aequationes 6. et 7. in §. 1. quid punctum datum, quid recta, quid planum datum significent, et per se, et in relatione inter se mutua et si referuntur ad aequationem generalem superficiei secundi ordinis.

Erat autem data recta, axis Z primus. Puncto deinde $(x', y', z')$, cuius distantiam parallelam plano dato constituimus esse $= D'$, id est commune cum omnibus punctis eidem conditioni subiectis, ut sint sita in cylindro elliptico (obliquo). Omissis enim accentibus, si magis generalim valet aequatio 6. §. 1. transit in

$$c^2D'^2 = (a^2+c^2)x^2 + (b^2+c^2)y^2 + 2abxy \qquad 1.$$

mutando dein situm coordinatarum, ut in §. 2. in transformatione aequationis generalis, i. e. statuendo: $x = x\cos\varphi - y\sin\varphi$, et $y = y\cos\varphi + x\sin\varphi$, ac deinde $tg\varphi = \frac{b}{a}$, facile perspicitur prodituram esse aequationem huius formae

$$c^2D'^2 = (a^2+b^2+c^2)x^2 + c^2y^2, \qquad 2.$$

sive, si respicis ad §. 2. N. 3.

$$D'^2 = \frac{x^2}{\cos^2\zeta} + y^2; \qquad 3.$$

i. e. aequatio cylindri, et quia quantitas D' secundum conditionem 8. in §. 1. est variabilis, aequatio cylindri variabilis. Est autem haec aequatio ita transformata, ut axes principales curvae genitricis sint paralleli axibus coordinatis X et Y, quoniam coordinatis orthogonalibus susceptis, sola quantitatum variabilium quadrata inveniuntur.

Quas aequationes, facile perspicitur, non mutari, sive c positiva, sive negativa sit, i. e. sive aequatio plani (§. 1. N. 1.) data sit

$$ax + by + cz = o.$$

sive

$$ax + by - cz = o. \qquad 4.$$

Hoc modo autem se habet hoc utrumque planum ad cylindrum: Est eadem ei et plano XY intersectio, eaque novus axis Y, at aequaliter et contrario est inclinatum, et alterius quidem inclinatio $\zeta$, denotatur aequatione

$$\cos^2\zeta = \frac{+c}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$$

alterius $\zeta''$ aequatione

$$\cos^2\zeta'' = \frac{-c}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}. \qquad 5.$$

Iam si placet uti his planis ita inclinatis ad nova plana XY, utraque transit aequatio cylindri (2 et 3), statuendo $x^2 = x^2\cos^2\zeta$, in

$$D'^2 = x^2 + y^2, \qquad 6.$$

unde elucet, utrumque planum 4. id esse, quod, ut omnia huic parallela, secet cylindrum in circulis, quorum radius $= D'$. —

Non possunt autem esse non positivae, $a^2$, $b^2$, $c^2$, quoniam, si negativae, imaginaria fierent plana 4. Ergo est curva cylindrum gignens ellipsis, itaque cylindrus est ellipticus, qui, quoniam non pendet aequatio a z, normalis est in plano XY, et cuius axis est axis Z, i. e. linea data, quoniam initium coordinatarum est situm in centro curvae genitricis. Deinde, quoniam $\cos^2\zeta < 1$, axis huius curvae parallelus novo axi Y maior est parallelo axi X. Valor semiaxis maioris est

$$= D'$$

minoris

$$= \frac{eD'}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}} = D'\cos\zeta \qquad 7.$$

Si $\cos^2\zeta = 1$, sive $a^2 = o$ et $b^2 = o$, utrumque planum in unum et in planum XY quidem coincidit, et habemus cylindrum circularem, qui est normalis in plano XY.

Definiuntur porro puncta, quorum locus geometricus quaeritur ad eam quoque rationem, qua distant a puncto dato $(x_1, o, o)$. Quae distantia significata erat quantitate D; iam scimus omnia haec puncta sita esse in sphaera, cuius radius est D, cuiusque centrum punctum datum $(x_1, o, o)$. Nam si placet ponere initium coordinatarum in punctum datum, statuendo in aequatione 7. §. 1., quae omissis accentibus haec est

$$D^2 = (x-x_1)^2 + y^2 + z^2, \qquad 8.$$

$x = x - x_1$, transit in

$$D^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

i. e. in aequationem sphaerae cuius initium coordinatarum est centrum et radius $= D$. Et quoniam D, ob conditionem 8. §. 1. variari potest, haec aequatio est sphaerae variabilis.

Propositum autem erat, invenire locum geometricum omnium punctorum, quae utrique aequationi simul satisfierent, quatenus $\mu D' = D$: thesis proposita igitur nulla alia est nisi.

> Locum geometricum omnium intersectionum cylindri variabilis elliptici et sphaerae variabilis, quorum radii sint in ratione constanti, quorumque resp. iidem axes eademque centra — esse superficiem secundi ordinis.

## 5.

Iam videbimus punctum datum, centrum sphaerae variabilis ad lineam datam, axem cylindri variabils, ita se habere, ut punctum datum sit alter focus eius curvae secundi ordinis, quae nascitur intersectione superficiei et plani XZ primi (N. 9. §. 1.) et linea data directrix huic respondens. Statuendo enim in aequatione 9. §. 1. $y = o$, invenimus huius curvae aequationem hanc:

$$\{(\mu^2-)c^2 + \mu^2a^2\}x^2 - c^2z^2 + 2c^2x_1x - c^2x_1^2 = 0\,;\; y = o. \qquad 1.$$

Cuius curvae alter semiaxis habet valorem

$$= \frac{cx_1\mu\sqrt{(a^2+c^2)}}{\mu^2(a^2+c^2)-c^2}$$

alter

$$= x_1\mu\sqrt{\left(\frac{-(a^2+c^2)}{\mu^2(a^2+c^2)-c^2}\right)}, \qquad 2.$$

unde invenimus semiparametrum sive ordinatam foci

$$= \frac{x_1^2\mu^2(a^2+c^2)}{c^2}. \qquad 3.$$

Quem valorem si substituimus quantitati z aequationis 1., nobis suppeditantur focorum coordinatae

$$x' = x_1\,;\; z' = o \text{ et } x'' = -x_1\frac{\mu^2(a^2+c^2)+c^2}{\mu^2(a^2+c^2)-c^2}\,;\; z'' = o. \qquad 4.$$

Est autem abscissa puncti dati $= x_1$, ergo punctum est focus alter huius curvae.

Statuendo deinde in aequatione 1. $x = o$ habemus

$$z = \pm x_1 \sqrt{-1}; \qquad 5.$$

i. e. ordinata puncti imaginarii curvae 1. in hac axi Z siti, aequalis est abscissae foci. Ergo linea, quae iam est axis coordinatarum alter, i. e. linea data, est directrix, quae puncto dato eidemque foco alteri respondet. — *)

Aequatio universalis superficierum secundi ordinis, qualis est in §. 1. N. 9. demonstrat quantitatem c non inveniri nisi quadratam (ut in §. antec. in cylindro variabili gignenti), itaque futurum fuisse, ut eandem aequationem, eoque modo eas quoque, quae ab ea derivatae sunt §. 2. NN. 5. 6. 7., invenissemus, si pro plano dato (N. 1. §. 1.)

$$ax + by + cz = o$$

datum fuisset

$$\left.\begin{array}{l} ax + by + cz = o \\ ax + by - cz = o. \end{array}\right\} 6.$$

Quae plana autem ad systemata coordinatarum aequationum 5. 6. 7. in §. 2. ita se habent: ut intersectio communis utrique et plano XY, parallela est axi Y, et ut inclinatio eorum aequalis et contraria ad planum XY (ut in §. antec.) significatur aequationibus

---

*) Ordinatam incidentem in directricem curvae secundi ordinis, aequalem esse distantiae foci respondentis ab illa multiplicatae cum $\sqrt{-1}$, ita universe demonstrabimus.

Aequatio universa et ellipsis et hyperbolae, si initium coordinatarum in axi maiore, si vis in centro, est situm, haec est:

$$\alpha x^2 + \beta z^2 + \delta = o.$$

Maiorem invenimus semiaxem esse

$$= \pm \sqrt{\left(\frac{-\delta}{\alpha}\right)},$$

minorem

$$= \pm \sqrt{\left(\frac{-\delta}{\beta}\right)},$$

unde colligimus excentricitatem esse

$$= \pm \sqrt{\left(\frac{\delta(\alpha-\beta)}{\alpha\beta}\right)}.$$

Distantia directricis a centro est tertia proportionalis ad excentricitatem et ad semiaxem maiorem itaque

$$= \mp \sqrt{\left(\frac{\beta\delta}{\alpha(\alpha-\beta)}\right)}.$$

Quem valorem si substituimus quantitati x in aequatione curvae, habemus:

$$z = \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha\delta}{\beta(\alpha-\beta)}\right)} \sqrt{-1}.$$

Distantia autem foci a directrice, sive differentia distantiae directricis a centro et excentricitatis, est

$$= \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha\delta}{\beta(\alpha-\beta)}\right)}.$$

Si porro curva est parabola et si initium coordinatarum orthogonalium est situm in vertice curvae, aequatio eius sit

$$z^2 = 2px;$$

directricis abscissa est

$$= -\frac{p}{2}.$$

Quem valorem si substituimus quantitati x, habemus

$$z = \pm p\sqrt{-1}$$

et distantia directricis a foco est

$$= p.$$

Quod erat demonstrandum.

$$\left.\begin{aligned}\cos\zeta' &= \frac{+c}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}\\ \text{et}\qquad & \\ \cos\zeta'' &= \frac{-c}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}.\end{aligned}\right\} 7.$$

Iam si placet uti planis ita inclinatis ad nova plana XY substituendo . . . . . . . . . .

$x = \pm x\cos\zeta = \pm x\frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$ et $z = z \pm x\sin\zeta = z \pm x\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2}\right)}$, transeunt: aequatio 5. §. 2. in

$$(\cos^2\zeta-\mu^2)x^2 + (1-\mu^2)y^2 + \left|\begin{array}{l} z^2 \\ \pm\, 2xz\sin\zeta \\ +\, x^2\sin^2\zeta \end{array}\right. - \mu^2x_1{}^2\frac{\sin^2 v-\mu^2}{(1-\mu^2)(\cos^2\zeta-\mu^2)} = 0, \qquad 8\,a.$$

aequatio 6. §. 2. in

$$(\cos^2\zeta-\mu^2)x^2 + (1-\mu^2)y^2 + \left|\begin{array}{l} z^2 \\ \pm\, 2xz\sin\zeta \\ +\, x^2\sin^2\zeta \end{array}\right. \mp 2\mu x_1\sqrt{\left(\frac{\sin^2 v-\mu^2}{1-\mu^2}\right)}\, x = 0, \qquad 8\,b.$$

aequatio 7. §. 2. in

$$(\cos^2\zeta-\mu^2)x^2 + (1-\mu^2)y^2 + \left|\begin{array}{l} z^2 \\ \pm\, 2xz\sin\zeta \\ +\, x^2\sin^2\zeta \end{array}\right. \mp 2\mu x_1\sqrt{\left(\frac{\sin^2 v-\mu^2}{\cos^2\zeta-\mu^2}\right)}\, y = 0, \qquad 8\,c.$$

et demonstrant, coëfficientes quantitatum $x^2$ et $y^2$ esse inter se aequales, itaque et utrumque planum et omnia huic parallela, superficies his aequationibus significatas, secare in circulis.

Si $\cos^2\zeta = 1$, sive $a^2 = 0$ et $b = 0$, utrumque planum in unum idque in planum XY coincidit, quibus conditionibus videbamus, cylindrum fieri circularem, et superficiem rotatoriam. Iam et hinc patet et ex eo quod diximus in §. praec.,

locum geometricum omnium intersectionum cylindri circularis variabilis et sphaerae variabilis esse superficiem rotatoriam secundi ordinis. *)

## 6.

Definiendum nunc erit, quid significent quantitates constantes. Quo consilio si proficiscimur ab aequatione 2. §. 2. sive

$$\left\{1 - \mu^2\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2}\right\}x^2 + (1-\mu^2)y^2 + z^2 - \mu^2x_1{}^2\frac{\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}-\mu^2}{(1-\mu^2)\left(\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}-\mu^2\right)} = 0, \qquad 1.$$

quippe quae valet in coordinatas orthogonales, edocemur eius forma, initium coordinatarum situm esse in centro, axes coordinatarum in axibus principalibus superficiei, itaque tria plana coordinatarum certam habere rationem ad superficiem, ergo pendere ac quantitatibus

6 constantibus.

Nec non datae sunt quantitates

2 constantes: $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$

*) Cfr. Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Raumes von L. J. Magnus. Problema 74.

(quas habemus dividendo aequationem 1. per $c^2$). Quid significent, ita invenimus: Quaerentibus nobis utramque directionem planorum eorum, quae secant superficiem in circulis, ea nobis suppeditabitur, si placet uti transformatione eiusmodi, ut systema axium X et Y circumagatur in ipsorum plano circa angulum $\varphi_1$, nec non insuper axis X in plano, quod nunc est XZ, circumagatur circa angulum $\zeta_1$. Tum opus est in N. 1. inferre

$$x = x\cos\varphi_1\cos\zeta_1 - y\sin\varphi_1,$$
$$y = y\cos\varphi_1 + x\sin\varphi_1\cos\zeta_1,$$
$$z = z + x\sin\zeta_1;$$

et transit in

$$\left\{1-\mu^2\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2}\right\}\left|\begin{array}{l} x^2\cos^2\varphi_1\cos^2\zeta_1 \\ -2xy\cos\varphi_1\cos\zeta_1\sin\varphi_1 \\ +y^2\sin^2\varphi_1 \end{array}\right. + (1-\mu^2)\left|\begin{array}{l} y^2\cos^2\varphi_1 \\ +2xy\cos\varphi_1\sin\varphi_1\cos\zeta_1 \\ +x^2\sin^2\varphi_1\cos^2\zeta_1 \end{array}\right.$$
$$+\left|\begin{array}{l} z^2 \\ +2xz\sin\zeta_1 \\ +x^2\sin^2\zeta_1 \end{array}\right. + \text{membrum const.} = 0.$$

Quodsi volumus novum planum XY ita esse situm, ut superficiem secet in circulo, necesse est, coefficiens quantitatis $x^2$ sit aequalis coefficienti quantitatis $y^2$, sive

$$\left\{1-\mu^2\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2}\right\}\cos^2\varphi_1\cos^2\zeta_1 + (1-\mu^2)\sin^2\varphi_1\cos^2\zeta_1 + \sin^2\zeta_1$$
$$= \left\{1-\mu^2\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2}\right\}\sin^2\varphi_1 + (1-\mu^2)\cos^2\varphi_1,$$

quod esse non potest nisi aut $\cos\varphi_1=0$, et $\sin\varphi_1=1$, aut $\cos\varphi_1=1$ et $\sin\varphi_1=0$. Altera conditio est respuenda, quia efficit

$$\cos^2\zeta_1 = \frac{a^2+b^2+c^2}{c^2} \text{ (i. e.} > 1).$$

Altera conditio, qua axis novus Y coincidit in priorem efficit, ut sit

$$\cos^2\zeta_1 = \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2} = \cos^2\zeta;$$

aut

$$\cos\zeta = \frac{\pm c}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}} \text{ et } \cos\varphi_1 = 1. \qquad 2.$$

Quae conditiones conveniunt binis directionibus planorum horum:

$$\sqrt{\left\{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2\right\}}\, x \pm z = 0. \qquad 3.$$

Est igitur summa quadratorum ambarum constantium $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$ aequalis quadrato tangentis trigonometricae inclinationis planorum eorum, quae secant superficiem in circulis.

Est porro in aequatione 1

constans $\mu$,

qua species superficiei determinatur (cfr. §. 3.). Quid significet hac in constructione, ita demonstrabimus. Si transformamus aequationem ita, ut initium coordinatarum transponamus in punctum ($x=\alpha$, $y=\beta$) ita, ut

$$\alpha = \frac{ac^2x_1}{\{\mu^2(a^2+b^2+c^2)-c^2\}\sqrt{(a^2+b^2)}};\quad \beta = \frac{-bx_1}{(\mu^2-1)\sqrt{(a^2+b^2)}}, \qquad 4.$$

et deinde circumagimus systema axium X et Y circa angulum $\varphi$ ita, ut

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{b}{a}, \qquad 5.$$

denuo habemus aequationem 9. in §. 1. sive

$$\mu^2 = \frac{c^2\{(x-x_1)^2+y^2+z^2\}}{(a^2+c^2)x^2+(b^2+c^2)y^2+2abxy}. \qquad 6.$$

Itaque $\mu$ est ratio constans radiorum sphaerae variabilis ad radios cylindri elliptici variabilis, cuius sectiones circulares eodem modo sunt inclinatae ad planum XY, quo sectiones circulares superficiei; in quibus centrum sphaerae variabilis est alter focus eius curvae, quae nascitur sectione superficiei et, quod nunc est, plani XZ, cuius directrix respondens est axis cylindri variabilis. Quoniam per constantem $\mu$ est constituta ratio radiorum sphaerae variabilis ad radios cylindri variabilis, in quo ratio axium ellipsis gignentis pendet ab inclinatione sectionum circularium in planum XY (cfr. §. 4. N. 7.): constanti $\mu$ etiam ratio axium superficiei ad inclinationem sectionum circularium in planum XY, constituta est (cfr. §. 3.).

Superest denique

constans $x_1$,

quae est in solo membro constanti aequationis 1. non potest igitur vim habere, nisi in dimensiones superficierum, si nihil mutatur in reliquis conditionibus, et eo, ut maior aut minor fiat, efficere, ut superficies maior aut minor fiat, ceterum sui similem teneat formam. — Quod attinet ad hanc constructionem, $x_1$ est distantia foci, de quo modo egimus, a directrice huic respondente.

Aequatio generalis nostra superficierum secundi ordinis pendet igitur a

6 constantibus planorum coordinatarum definitorum;

2 constantibus $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$, quibus definiuntur inclinationes sectionum circularium in planum XY;

1 constanti $\mu$, qua definitur ratio axium superficiei ad illam inclinationem;

1 constanti $x_1$, qua definiuntur dimensiones superficierum,

ergo a 10 constantibus.

Quoniam autem superficies secundi ordinis novem constantibus satis est definita *), complures harum decem eatenus sunt arbitrariae, ut binae singulis quantitatibus algebraicis sint aequales.

Perspicuum est, nec ullam sex constantium, quae datae sunt planis coordinatarum, nec $\mu$, quippe quae constituit rationem axium ad sectiones circulares in una eademque superficie, arbitrarias esse posse. Quod aliter se habet in constantibus $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$. In definienda inclinatione sectionum circularium ad planum XY ratio tantum habetur summae quadratorum constantium $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$, quae aequalis erat quadrato tangentis inclinationis $\zeta$ sectionum circularium ad planum axium principalium XY. Summa igitur tantum constans sit necesse est, et est quidem

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2 = \operatorname{tg}^2\zeta. \qquad 7.$$

Sunt porro definiendae dimensiones superficiei, quae pendent a membro constanti aequationis generalis:

$$\mu^2 x_1^2 \frac{\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} - \mu^2}{(1-\mu^2)\left(\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2} - \mu^2\right)},$$

*) Cfr. Magnus anal. Geom. d. Raumes §. 56.

sive si rationem habemus aequationis 7.

$$\frac{\mu^2 x_1^2\left\{\left(\frac{a}{c}\right)^2+1-\mu^2(\operatorname{tg}^2\zeta+1)\right\}}{(1-\mu^2)\left\{1-\mu^2(\operatorname{tg}^2\zeta+1)\right\}}.$$

In quo membro cum inveniatur constans $\frac{a}{c}$ arbitraria secundum antecedentia, altera quoque arbitraria insit necesse est, quae nulla esse potest nisi $x_1$. Utraque cum inveniatur in numeratore, is tantum constans ponatur necesse est, si vis

$$\mu^2 x_1^2\left\{\left(\frac{a}{c}\right)^2+1-\mu^2(\operatorname{tg}^2\zeta+1)\right\}=\delta^4. \qquad 8.$$

Ex qua aequatione et ex N. 7. invenimus, si sumimus $\frac{a}{c}$ constantem arbitrariam independentem:

$$\left(\frac{b}{c}\right)^2=\operatorname{tg}^2\zeta-\left(\frac{a}{c}\right)^2$$

et

$$x_1^2=\frac{\delta^4}{\mu^2\left\{\left(\frac{a}{c}\right)^2+1-\mu^2(\operatorname{tg}^2\zeta+1)\right\}} \qquad 9.$$

Pendet autem ab his arbitrariis cum situs plani, in quo est centrum sphaerae variabilis et axis cylindri variabilis, tum distantia eorum. Cuius plani aequatio, quae valebat in coordinatis primis erat $y=o$. Quam si transformamus secundum formulas, quibus usi sumus ad transformandam aequationem 9. in aequationem 2. §. 2. habemus

$$y=-\frac{b}{a}x-\frac{\mu^2 b x_1\sqrt{(a^2+b^2)}}{(\mu^2-1)\left\{\mu^2(a^2+b^2+c^2)-c^2\right\}},$$

sive si respicimus ad aequationes 9:

$$y=\mp\sqrt{\left(\frac{\operatorname{tg}^2\zeta-\left(\frac{a}{c}\right)^2}{\left(\frac{a}{c}\right)^2}\right)}x\mp\frac{\mu\operatorname{tg}\zeta\sqrt{\left(\operatorname{tg}^2\zeta-\left(\frac{a}{c}\right)^2\right)}\delta^2}{(\mu^2-1)\left\{\mu^2(\operatorname{tg}^2\zeta+1)-1\right\}\sqrt{\left(\left(\frac{a}{c}\right)^2+1-\mu^2(\operatorname{tg}^2\zeta+1)\right)}}. \qquad 10.$$

Arbitrarium est hoc planum, quum constans arbitraria $\frac{a}{c}$ inveniatur in hac eius aequatione. Transit tum tantum initium coordinatarum, si vel $b^2=o$ vel $a^2=o$, i. e. si coincidit in planum axium principalium vel XZ vel YZ.

Unicuique horum situum arbitrariorum alius axis cylindri variabilis et aliud centrum sphaerae variabilis datum sit necesse est, et nunc interest, constituere loca geometrica horum axium et centrorum. Datae erant in N. 4. coordinatae axis cylindri variabilis aequationibus

$$\alpha=\frac{ac^2x_1}{\left\{\mu^2(a^2+b^2+c^2)-c^2\right\}\sqrt{(a^2+b^2)}};\quad \beta=\frac{-bx_1}{(\mu^2-1)\sqrt{(a^2+b^2)}}.$$

Quae coordinatae sunt variabiles, si sumimus, quantitates $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $x_1$ esse arbitrarias. Tum invenimus locum geometricum rectarum datarum, sive axium cylindrorum variabilium, si eliminamus ex utraque aequatione 9. et ex hac utraque quantitates $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $x_1$, et si deinde coordinatas $\alpha$ et $\beta$ ponimus esse variabiles resp. aequales x et y. Dehinc habemus:

$$\left\{\mu^2(\operatorname{tg}^2\zeta+1)-1\right\}\left\{\operatorname{tg}^2\zeta+1\right\}x^2+\left\{\mu^2-1\right\}y^2+\frac{\delta^4}{\mu^2(\mu^2-1)\left\{\mu^2(\operatorname{tg}^2\zeta+1)-1\right\}}=o,$$

sive si ponimus $\frac{1}{\mathrm{tg}^2\zeta+1} = \cos^2\zeta$ et mutamus signa:

$$(\cos^2\zeta-\mu^2)x^2+(1-\mu^2)\cos^4\zeta y^2 = \frac{\delta^4\cos^6\zeta}{\mu^2(1-\mu^2)(\cos^2\zeta-\mu^2)}. \qquad 11.$$

Est igitur locus geometricus rectarum, quaecunque loco axis Z primae datae esse possunt, cylindrus secundi ordinis, cuius axis est normalis in plano XY, et cuius axes curvae genitricis paralleli sunt axibus X et Y superficiei.

Locus geometricus centrorum sphaerarum variabilium suppeditatur nobis, si coordinatas, quibus initio usi sumus puncti dati (§. 1.)

$$(x) = x_1, \quad (y) = o \qquad 12.$$

transformamus in coordinatas, quae nunc sunt, et iis quidem formulis, quas adhibuimus in initio §. 2. Colligitur itaque ex N. 12.

$$a(x)-b(y) = \frac{\mu^2\sqrt{(a^2+b^2)}x_1\{(\mu^2-1)(a^2+b^2+c^2)+b^2\}}{(\mu^2-1)\{\mu^2(a^2+b^2+c^2)-c^2\}}$$

et

$$b(x)+a(y) = -\frac{\mu^2 abx_1\sqrt{(a^2+b^2)}}{(\mu^2-1)\{\mu^2(a^2+b^2+c^2)-c^2\}},$$

et dehinc

$$(x) = \frac{a\mu^2x_1\{a^2+b^2+c^2\}}{\sqrt{(a^2+b^2)}\{\mu^2(a^2+b^2+c^2)-c^2\}}$$

et

$$(y) = -\frac{b\mu^2x_1}{\sqrt{(a^2+b^2)}(\mu^2-1)}. \qquad 13.$$

Eliminando deinde ex his et ex aequationibus 9. constantes arbitrarios $\frac{b}{c}$, $x_1$ et $\frac{a}{c}$, coordinatae (x) et (y) puncti fiunt variabiles, consequiturque inde, locum geometricum punctorum datorum esse

$$\{\mu^2(\mathrm{tg}^2\zeta+1)-1\}x^2 + \{\mu^2-1\}\{\mathrm{tg}^2\zeta+1\}y^2 + \frac{\mu^2(\mathrm{tg}^2\zeta+1)\delta^4}{(\mu^2-1)\{\mu^2(\mathrm{tg}^2\zeta+1)-1\}} = o,$$

sive si ponimus $\frac{1}{\mathrm{tg}^2\zeta+1} = \cos^2\zeta$ et mutamus signa:

$$(\cos^2\zeta-\mu^2)x^2 + (1-\mu^2)y^2 = \frac{\mu^2\delta^4\cos^2\zeta}{(1-\mu^2)(1-\cos^2\zeta)}. \qquad 14.$$

Est igitur locus geometricus punctorum, quaecunque loco puncti dati data esse possunt, linea secundi ordinis, cuius centrum est in centro superficiei, et cuius axes coincidunt in axes X et Y superficiei.

Tres aequationes: *a*) aequatio curvae gignentis locum geometricum lineae datae N. 11.; *b*) aequatio sectionis principalis superficiei et plani XY, qualem invenimus, si ponimus in §. 2. N. 5. $z = o$, si introducimus quantitatem $\delta^4$ (N. 8.) et si multiplicamus aequationem per $\cos^2\zeta$; *c*) aequatio loci geometrici puncti dati N. 14.:

$$\left.\begin{aligned} a)\quad & (\cos^2\zeta-\mu^2)x^2 + (1-\mu^2)\cos^4\zeta\cdot y^2 = \frac{\delta^4\cos^6\zeta}{\mu^2(1-\mu^2)(\cos^2\zeta-\mu^2)},\\ b)\quad & (\cos^2\zeta-\mu^2)x^2 + (1-\mu^2)\cos^2\zeta\cdot y^2 = \frac{d^4\cos^4\zeta}{(1-\mu^2)(\cos^2\zeta-\mu^2)},\\ c)\quad & (\cos^2\zeta-\mu^2)x^2 + (1-\mu^2)y^2 \qquad = \frac{\mu^2\delta^4\cos^2\zeta}{(1-\mu^2)(\cos^2\zeta-\mu^2)} \end{aligned}\right\} 15\,a.$$

transeunt, si valores axium superficiei (N. 5. §. 2.) inserimus, statuendo $\frac{\delta^4\cos^4\zeta}{(1-\mu^2)(\cos^2\zeta-\mu^2)^2} = A^2$,
$\frac{\delta^4\cos^2\zeta}{(1-\mu^2)^2(\cos^2\zeta-\mu^2)} = B^2$, $\frac{\delta^4\cos^2\zeta}{(1-\mu^2)(\cos^2\zeta-\mu)} = C^2$, in

$$\left.\begin{aligned} a)\quad & \frac{B^4}{B^2-C^2}x^2 + \frac{A^4}{A^2-C^2}y^2 = \frac{A^4B^4}{(A^2-C^2)(B-C^2)}, \\ & \text{sive } \left\{\frac{B^2}{\mu^2}x^2 + \frac{A^2\cos^2\zeta}{\mu^2}y^2 = \frac{A^2\cos^2\zeta}{\mu^2}\cdot\frac{B^2}{\mu^2}\right\}, \\ b)\quad & B^2x^2 + A^2y^2 = A^2B^2, \\ c)\quad & (B^2-C^2)x^2 + (A^2-C^2)y^2 = (A^2-C^2)(B^2-C^2), \\ & \text{sive } \left\{\mu^2B^2x^2 + \frac{\mu^2A^2}{\cos^2\zeta}y^2 = \frac{\mu^2A^2}{\cos^2\zeta}\cdot\mu^2B\right\}. \end{aligned}\right\} \quad 15\,b.$$

Statim cognoscitur primo: has curvas eiusdem esse generis, et deinde: primae harum curvarum semiaxem alterum esse directricis sectionis principalis XZ distantiam D a centro superficiei, semiaxem alterum, directricis sectionis principalis YZ distantiam D' a centro superficiei; porro tertiae harum curvarum axes respondentes esse excentricitates respondentes E et E'. Quare aequationes hanc induunt formam:

$$\left.\begin{aligned} D'^2x^2 + D^2y^2 &= D^2D'^2, \\ B^2x^2 + A^2y^2 &= A^2B^2, \\ E'^2x^2 + E^2y^2 &= E^2E'^2. \end{aligned}\right\} \quad 15\,c.$$

Inde cum facile eluceat curvam tertiam semper esse sitam intra secundam, planum sub N. 10., in quo sita est recta data et punctum simul datum, nunquam potest esse planum tangens superficiem, neque unquam situm esse extra superficiem.

Hactenus respeximus unum tantummodo focum eius curvae, quae intersectione plani N. 10. et superficiei nascebatur, necnon directricem huic respondentem. Facile autem elucet, curvam N. 14. alterius quoque foci esse locum geometricum, et cylindrum N. 11. esse locum directricis isti respondentis, quum in his quoque locis, si b=o vel a=o excentricitates sectionum principalium XZ et YZ, et distantiae respondentes directricum sint axes resp. curvae, quae complectitur focos et curvae gignentis cylindrum continentem directrices. Iam distant in quovis plano 10. ambo foci et ambae directrices resp. aequaliter a vertice respondente curvae intersecantis: ergo planum N. 10. eo definitum est: quod normale est in plano XY; quod it per rectam in eo, quae secet ita curvas 15., ut partes rectae cum inter primam et alteram, tum inter alteram et tertiam sint aequales; quod tum demum it per centrum superficiei, si coincidit in altero planorum XZ vel YZ; quod semper denique secat planum axium principalium XZ.

Si $a^2 = o$ simulque $b^2 = o$, in aequatione 10. evanescit membrum constans et transit aequatio in

$$y = \frac{o}{o}\,x;$$

significantur aequationibus 15. circuli concentrici. Itaque planum N. 10. it per centrum superficiei, si est rotatoria, quod simul est centrum circulorum concentricorum, et ad arbitrium est inclinatum ad planum XZ. —

Facile igitur perspicitur

Distantias punctorum omnium superficiei secundi ordinis, parallelas directioni sectionum circularium a directrice, et a foco huic respondente curvae, qualis formatur intersectione plani, nuperrime descripti, cum superficie, — esse in ratione constanti.

## 7.

Iam facillime quae diximus in universum de quantitatibus constantibus referre possumus ad superficies singulas, quales distinguimus in §. 3.

A. I. 1 *a.* In superficie elliptica constans $\mu$, a qua pendebat ratio axium superficiei ad inclinationem sectionum circularium in planum XY minor erat, quam cosinus eius; i. e. radius sphaerae variabilis gignentis minor est, semiaxi minore ellipsis gignentis cylindrum variabilem (cfr. §. 1. N. 8. et §. 4. N. 7.). Quia porro $\mu^2 < \sin^2 v$, quantitas $\delta^4$ (§. 6. N. 8.) est positiva, axes sunt reales; in plano XZ, in quo sunt normales sectiones circulares, situs est axis maximus et minimus superficiei et est quidem axis X, in quem inclinationem variari constituimus, maximus. Sectio principalis plani XY, sive eius plani, in quo siti sunt axis maximus et medius, quum sit ellipsis, locus quoque geometricus punctorum datorum nec non curva gignens locum rectarum datarum sunt ellipses.

II. 2 *a.* 3. 4 *a.* Si $\mu^2 > \cos^2\zeta$, sed $\mu^2 < 1$, inveniebamus, prout $\delta^4 > o$ (in superficie elliptico-hyperbolica), prout $\delta^4 = o$ (in cono), prout $\delta^4 < o$ (in superficie hyperbolico-hyperbolica): sectionem principalem XY esse hyperbolam, cuius axis realis situs est in axi X, aut duas rectas se secantes, aut hyperbolam, cuius axis realis est in axi Y; significant ergo etiam duae reliquae aequationes N. 15. §. 6., aut hyperbolas, quarum axes reales sunt siti in axi X, aut binas rectas se secantes in eodem puncto, aut hyperbolas, quarum axes reales siti sunt in axi Y. Conditione autem $\mu^2 > \cos^2\zeta$ sed $\mu^2 < 1$ significatur, radium sphaerae variabilis semper esse maiorem semiaxi minore ellipsis gignentis cylindrum variabilem, minorem maiore.

Annotatio. Videbamus degenerare superficies hyperbolicas in conum, si $\mu^2 = \sin^2 v = \frac{a^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}$.

Evincitur autem hac conditione, esse

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 = \mu^2(\mathrm{tg}^2\zeta+1) - 1 = \frac{\mu^2-\cos^2\zeta}{\cos^2\zeta}$$

quare iam non constantem arbitrariam. Est porro

$$\delta^4 = o$$

indeque (N. 9. in §. 6.)

$$x_1 = \frac{o}{o}.$$

Aequationes N. 15. §. 6. transeunt in

$$a)\quad y = \pm \frac{1}{\cos^2\zeta} \sqrt{\left(\frac{\mu^2-\cos^2\zeta}{1-\mu^2}\right)}\, x,$$

$$b)\quad y = \pm \frac{1}{\cos\zeta} \sqrt{\left(\frac{\mu^2-\cos^2\zeta}{1-\mu^2}\right)}\, x,$$

$$c)\quad y = \pm \sqrt{\left(\frac{\mu^2-\cos^2\zeta}{1-\mu^2}\right)}\, x.$$

Aequatio plani, in quo situs est centrum sphaerae variabilis et axis cylindri variabilis simul data, N. 10. §. 6. transit in

$$y = \mp \sqrt{\left(\frac{1-\mu^2}{\mu^2-\cos^2\zeta}\right)} \mp \frac{o}{o},$$

et demonstrat, qualiscunque sit $x_1$, inclinationem eius ad planum XZ esse aequalem 90° minutos inclinatione rectae c., sive loci punctorum datorum, distantiam autem eius a centro coni esse arbitrariam. Qua ratione cum hoc planum loca et punctorum datorum et rectarum datarum semper secet, $x_1$ semper est realis sive $=o$. Ergo his con-

ditionibus propositis gignitur conus, qualiscunque est distantia centri sphaerae variabilis ab axi cylindri variabilis.

III. 6 *b*. Si $\mu^2 > 1$, i. e. si radius sphaerae variabilis maior est radio cylindri variabilis, habemus superficiem hyperbolico-hyperbolicam, et curvae N. 15. §. 6. sunt ellipses.

IV. 1 *b*. 2 *b*. 5. 4 *c*. Conditio peculiaris si intercedit, ut sit $\sin^2 v = 1$ sive $b^2 = o$, ergo $\left(\frac{n}{c}\right)^2 = tg^2\zeta$, i. e. ut coincidat in planum XZ illud planum, in quo est punctum datum et recta simul data: — habemus 1 *b*. superficiem ellipticam, si $\mu^2 < \cos^2\zeta$; 2 *b*. superficiem elliptico-hyperbolicam, si $\mu^2 > \cos^2\zeta$ sed $\mu^2 < 1$; 5. cylindrum hyperbolicum, si $\mu^2 = 1$, i. e. si radius sphaerae variabilis aequalis est radio cylindri variabilis; 4 *c*. superficiem hyperbolico-hyperbolicam, cuius sectio principalis elliptica est sita in plano YZ, si $\mu^2 > 1$. Curvarum significatarum aequationibus N. 15 *a*) et *c*) in §. 6. non respiciendi sunt nisi fines axium X, in 1 *b*. 2 *b*. et 4 *c*. In N. 7. significantur iis binae rectae parallelae axi Y.

Annotatio. Antea relationes sectionum circularium ad superficies erant simpliciores, quam quae mentione dignae fuissent; speciosi autem aliquid habemus in cylindro hyperbolico. Substituendo conditiones, quae in eo valuerant, in aequationes 8. §. 5. habemus

$$-\left\{1-\cos^2\zeta-\sin^2\zeta\right\}x^2 + o\cdot y^2 + z^2 \pm 2xz\sin\zeta = -\frac{x_1^2}{1-\cos\zeta},$$

sive

$$-x^2 + y^2 = -\infty.$$

Evincitur autem hac aequatione sectiones circulares non esse reales, sed hyperbolas aequilateras, quarum axes sunt infinite magni.

V. 1 *c*. 6. 4 *d*. 4 *e*. Conditio peculiaris si intercedit, ut sit $\sin^2 v = \cos^2\zeta$ sive $a^2 = o$, i. e. ut planum, in quo situm est punctum datum et recta simul data, coincidat in planum axium principalium YZ, habemus: 1 *c*. ellipsoidem, si $\mu^2 < \cos^2\zeta$; 6. cylindrum ellipticum, cuius axis est normalis in plano YZ, si $\mu^2 = \cos^2\zeta$, i. e. si radius sphaerae variabilis aequalis est semiaxi minori ellipsis gignentis cylindrum respondentem; 4 *d*. et *e*. superficies hyperbolico-hyperbolicas, quarum sectiones principales ellipticae sitae sunt in planis aut YZ aut XZ si aut $\mu^2 > \cos^2\zeta$ sed $\mu^2 < 1$, aut $\mu^2 > 1$. — Curvarum significatarum aequationibus N. 15. *a*. et *c*. in §. 6. non respiciendi sunt nisi fines axium Y in 1 *c*. 4 *d*. et 4 *e*. In 6. significantur iis binae rectae axi X parallelae.

Annotatio. Quamquam in aequatione coni ac cylindri et hyperbolici et elliptici decem constantium singulae excidunt (nam in prima constans $\frac{a}{c}$ iam non erat arbitraria, quia $\left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{\mu^2-\cos^2\zeta}{\cos^2\zeta}$, in altera fiebat $\frac{a}{c} = o$, in tertia $\frac{a}{c} = tg\zeta$, quia $b = o$) tamen in iis arbitrium valere potest illud, quod significant aequationes 15. §. 6., quoniam hi casus peculiares superficierum secundi ordinis ab octonis tantum pendent constantibus, itaque nona est arbitraria. Conus enim est definitus centro (tribus constantibus) et linea secundi ordinis (quinque constantibus), in qua movenda est recta gignens; cylindrus secundi ordinis definitus est directione sui axis (tribus constantibus) et linea genitrice secundi ordinis (quinque constantibus).

B. I. Si $\mu^2 = \cos^2\zeta$, i. e. si in universum sectiones principales XY et XZ sunt parabolae, aequationes 15. §. 6. ita quoque transformentur, ut transformabatur aequatio generalis

superficierum secundi ordinis in §. 2. N. 2. statuendo $x = \mp \frac{\delta^2\cos^2\zeta}{\sqrt{(1-\mu^2)(\cos^2\zeta-\mu^2)}}$ et immutantur, si hunc valorem inserimus in aequationes 15. et simul ponimus $\mu^2=\cos^2\zeta$

$$\left.\begin{aligned} a)\quad & y^2 \mp 2\frac{\delta^2}{\cos^2\zeta(1-\cos^2\zeta)^{\frac{1}{2}}}\, x = \frac{\delta^4}{\cos^4\zeta(1-\cos^2\zeta)^2} \\ b)\quad & y^2 \mp 2\frac{\delta^2}{(1-\cos^2\zeta)^{\frac{1}{2}}}\, x = 0 \\ c)\quad & y^2 \mp 2\frac{\delta^2}{(1-\cos^2\zeta)^{\frac{1}{2}}}\, x = \frac{\delta^4\cos^2\zeta}{(1-\cos^2\zeta)^2}. \end{aligned}\right\} 1\,a.$$

Quarum $a)$ est aequatio curvae gignentis cylindrum, qui continet lineas datas; $b)$ sectionis principalis XY superficiei; $c)$ loci punctorum datorum. — In quas aequationes si inserimus valores semiparametrorum sectionum principalium cum plani XY : $p = \frac{\delta^2}{(1-\cos^2\zeta)^{\frac{1}{2}}}$, tum XZ: $p' = \frac{\delta^2}{(1-\cos^2\zeta)^{\frac{1}{2}}}$, transeunt aequationes in

$$\left.\begin{aligned} a)\quad & y^2 \mp 2\frac{\delta^2}{\cos^4\zeta(1-\cos^2\zeta)^{\frac{1}{2}}}\left\{\cos^2\zeta\cdot x \pm \frac{p'}{2}\right\} = 0, \\ b)\quad & y^2 \mp 2px = 0, \\ c)\quad & y^2 \mp 2\frac{\delta^2\cos^2\zeta}{(1-\cos^2\zeta)^{\frac{1}{2}}}\left\{x \pm \frac{p'}{2}\right\} = 0 \end{aligned}\right\} 1\,b.$$

et demonstrant verticem parabolae $a.$, a vertice parabolae $b.$, abesse dimidium semiparametrum $p'$, i. e. distantiam directricis sectionis principalis XZ; et verticem parabolae $c.$, ab eodem distantiam foci respondentis.

Aequatio plani arbitrarii §. 6. N. 10., quod continet rectam et punctum simul data, in coordinatis, qui nunc sunt transit in

$$y = \mp \frac{\sqrt{\left(\mathrm{tg}^2\zeta-\left(\frac{a}{c}\right)^2\right)}}{\frac{a}{c}}\left\{x \mp \frac{\delta^2\sqrt{(\mathrm{tg}^2\zeta+1)}}{\mathrm{tg}\zeta}\right\}$$

$$= \mp \frac{\sqrt{\left(\mathrm{tg}^2\zeta-\left(\frac{a}{c}\right)^2\right)}}{\frac{a}{c}}\left\{x \mp p'\right\}. \qquad 2.$$

7 *a.* et *b.* Iam si $\sin^2 v$ sive $\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} \leqq 1$, habemus superficiem elliptico-parabolicam, cuius axis situs est in axi X. Radius sphaerae variabilis aequalis est axi minori cylindri variabilis, quia $\mu^2 = \cos^2\zeta$.

8. Si insuper $a^2=0$ (sive $\sin^2 v=\cos^2\zeta$) degenerat superficies ista in rectam, quae sita est in axi X. Tum habemus $\delta^2=0$ (cfr. N. 8. §. 6.) itaque transeunt aequationes tres N. 1. in $y=0$, et significant axem X; aequatio N. 2. in $x=0$ et significat axem Y, quare quantitas $x_1=0$ sit necesse est, i. e. centrum sphaerae variabilis, cuius radius aequalis est axi minori ellipsis gignentis cylindrum variabilem, situm est in axi eius. Potest igitur sphaera cylindrum intus tangere ibi tantum, ubi axis X secat et sphaeram et cylindrum, i. e. recta oriatur necesse est, quae sita est in axi X.

9 *a.* Si $\cos^2\zeta=\mu^2=1$, i. e. si sectiones circulares superficiei parallelae sunt plano XY,

si igitur cylindrus variabilis est circularis et radius sphaerae variabilis est aequalis radio huius cylindri, habemus cylindrum parabolicum, qui est normalis in plano XZ. Circuli sectionum circularium habent radios infinite magnos, sive degenerant in rectas, quod apparet, si ponimus z esse quantitatem constantem. — Cylindrum parabolicum habere possumus pro superficie elliptico-parabolica rotatoria, ut facillime apparet.

II. Simulac fit $\mu^2=1$, i. e. simulatque in universum sectiones XY et YZ sunt parabolae, transformentur ita aequationes 15. §.6., ut ponamus (cfr. §. 2. N. 7.) $y = y \mp \frac{\delta^2 \cos\zeta}{(1-\mu^2)\sqrt{(\cos^2\zeta-\mu^2)}}$ *). Transeunt deinde, si insuper $\mu^2=1$ in

$$\left.\begin{aligned} a)\quad & x^2 \mp 2\frac{\delta^2\cos^5\zeta}{(\cos^2\zeta-1)^{\frac{3}{2}}}\, y = \frac{\delta^4\cos^6\zeta}{(\cos^2\zeta-1)^2}, \\ b)\quad & x^2 \mp 2\frac{\delta^2\cos^3\zeta}{(\cos^2\zeta-1)^{\frac{3}{2}}}\, y = 0, \\ c)\quad & x^2 \mp 2\frac{\delta^2\cos\zeta}{(\cos^2\zeta-1)^{\frac{3}{2}}}\, y = -\frac{\delta^4\cos^2\zeta}{(\cos^2\zeta-1)^2}. \end{aligned}\right\} 3\,a.$$

Statuendo deinde semiparametrum sectionis principalis XY, $\frac{\delta^2\cos^3\zeta}{(\cos^2\zeta-1)^{\frac{3}{2}}} = p_1$, et sectionis principalis YZ, $\frac{\delta^2\cos\zeta}{(\cos^2\zeta-1)^{\frac{3}{2}}} = p_1'$, hae transeunt aequationes in

$$\left.\begin{aligned} a)\quad & x^2 \mp 2\frac{\delta^2\cos^5\zeta}{(\cos^2\zeta-1)^{\frac{3}{2}}}\left\{y \pm \frac{p_1'}{2}\right\} = 0, \\ b)\quad & x^2 \mp 2p_1 y = 0, \\ c)\quad & x^2 \mp 2\frac{\delta^2\cos\zeta}{(\cos^2\zeta-1)^{\frac{3}{2}}}\left\{y \mp \frac{p_1'}{2}\right\} = 0 \end{aligned}\right\} 3\,b.$$

de quibus iudicandum est similiter ac de aequationibus sub N. 1.

Aequatio plani arbitrarii N. 10. §. 6. in his coordinatis transit in

$$y = \frac{-b}{a}\,x - \frac{bx_1}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$
$$= \mp \frac{\sqrt{\left(tg^2\zeta - \left(\frac{a}{c}\right)^2\right)}}{\frac{a}{c}}\, x \mp p_1'. \qquad 4.$$

Radius sphaerae variabilis, quia $\mu^2=1$, semper est aequalis radio cylindri elliptici variabilis.

10 *a.* et *b.* Iam si $\sin^2 v < 1$ et $\cos^2\zeta \lesseqgtr 1$, aut si $\sin^2 v = \cos^2\zeta$ habemus superficiem hyperbolico-parabolicam. Lineae 3. sunt parabolae. Est aequatio sectionum circularium secundum aequationem tertiam N. 8. §. 5.

$$x^2 + y^2 = \infty$$

i. e. circuli infinite magni radii.

9 *b.* Si $\sin^2 v = 1$ et $\cos^2\zeta = 1$, eaedem intercedunt conditiones, quae sub 9 *a.* Quoniam cylindrus variabilis fit circularis, nihil interest, quomodo transformemus axes X et Y inter se normales in ipsorum plano, quare is quoque cylindrus parabolicus, qui est normalis in axi YZ, idem est, quam qui est normalis in plano XZ sub N. 9 *a.*

*) Quia nunc habemus $\delta^2 = x_1 b\sqrt{-1}$, realis est quantitas $\frac{\delta^2}{(\cos^2\zeta-1)^{\frac{1}{2}}}$.

C. Si $x_1^2=o$, coincidit centrum sphaerae variabilis in axem cylindri variabilis, et

10. si $\mu^2<\cos^2\zeta$, i. e. si radius sphaerae minor est axi minore ellipsis gignentis cylindrum, tum tantum possunt se secare, si radii eorum sunt $=o$, i. e. in uno tantum puncto.

3 *b*. De cono confer, quae dicta sunt sub 3 *a*., si axis eius est in axi X. Si vero est $\mu^2>1$, i. e. si radius sphaerae variabilis maior est radio cylindri variabilis, facillime perspicitur, quomodo gignatur conus cuius axis est in axi Z.

8 *b*. Si $\mu^2=\cos^2\zeta$, i. e. si radius sphaerae variabilis aequalis est axi minore, sphaera tangit cylindrum in axi X tantum, itaque gignunt rectam in axi X sitam.

11. Si $\mu^2=1$, i. e. si radius sphaerae aequalis est radio cylindri, semper se intersecant in his duabus sectionibus circularibus cylindri, quae secant hanc axem maiorem, sive axem Y, et sic efficiunt dua plana se intersecantes in axi Y.

12. Si insuper et $a^2=o$ et $b^2=o$, coincidunt hae duo plana in unum planum et in XY quidem. Cylindrus fit circularis et sphaera semper intus eum tangit in omnibus punctis communibus cum plano XY.

---

Iam, si respicimus thesim e geometria plana desumptam, cuius analogiam in hoc libello secuti sumus, apparet, foco curvae respondere lineam secundi ordinis superficiei; directrici, cylindrum secundi ordinis. Praeterea quod demonstrari potest e rationibus huius lineae et huius cylindri ad superficiem, similibus foci et directricis ad curvam, aliarum disquisitionum materiem mihi praebebit.

# V I T A.

Natus ego sum *Fabianus Carolus Ottocar a Feilitzsch* die XV. Iulii MDCCCXVII. Longosalissae, Thuringiae urbe, patre *Christopho Ernesto*, matre *Carolina Wilhelmina* e gente *Graeser*, quos parentes optimos adhuc sospites summa pietate venerari iuvat. Scholam *Blochmannianam* Dresdis ab undecimo anno per tres frequentavi annos et iam tum per virum clarissimum *Peters* amor rerum mathematicarum mihi est insitus. In Lyceum gentis *Witzlebianae Rhodosciam* inde deductus, quod florebat sub rectoratu Dr. *Wilhelm* professoris maximam cepi voluptatem e scholis mathematicis et physicis praeceptoris dilectissimi Dr. *Anton*. Ibique septem commoratus per annos, maturitatis testimonio impetrato in almam academiam *Lipsiensem* me contuli, ubi anni MDCCCXXXVII. die XXVIII. mensis octobris a *I. A. Schilling* tunc temporis rectore magnifico in civium numerum receptus, disciplinas mathematicas et physicas per omnem vitam colendas mihi elegi. Assedi ibi in scholis habitis a cl. *Hartenstein* de introductione in philosophiam: a cl. *Marbach* de philosophia fundamentali et logica; a cl. *Erdmann* de chemia experimentali theoretica et practica; a cl. *Fechner* de physica experimentali universa; a cl. *Moebius* de elementis astronomiae, de instrumentis astronomicis, nec non de sectionibus coni; denique a cl. *Drobisch* de theoria combinationum, de geometria analytica, de calculo differentiali et integrali. Tribus semestribus ita peractis transmigravi in hanc inclytam universitatem Rhenanam; ibique civium numero adscriptus a viro cl. *C. Mayer*, tunc temporis rectore magnifico et nomen apud virum cl. *A. G. a Schlegel*, amplissimi philosophorum ordinis decanum, sum professus. Scholae, quibus hic per duos annos interfui, hae sunt. Psychologiam et historiam philosophiae inde a Cantio docuit cl. *Brandis;* historiam inde a saeculo XVI. cl. *Arndt;* historiam annorum modo praeterlapsorum cl. *Loebell:* physiologiam et anthropologiam cl. *Nasse;* zoologiam et zootomiam et petrefactologiam cl. *Goldfuss;* mineralogiam cl. *Noeggerath;* denique mechanicam, theoriam curvarum, partes selectas e calculo integrali, iterumque geometriam analyticam cl. *Plücker*. Praeter has scholas mihi contigit, ut adscriberer sociis seminarii physici a v. cl. *Treviranο*, tunc temporis directore.

Cum praeceptoribus omnibus ob summa de me merita gratias ago maximas, tum facere non possum, quin quinquevirum cl. cl. *Plücker, Bischof, Goldfuss, Treviranus, Noeggerath,* seminarii moderatorum, praecipue me devinctum et obstrictum esse beneficiis iisdemque me perennem et habere et habiturum gratiam fatear, quorum in rebus naturalibus eximia gavisus sim doctrina. Maxime autem duobus viris, altero absenti quidem, *Drobisch*, altero *Plücker* v. v. cl. cl. ob praeclarum, qua me mathematicis rebus imbuerunt studium curamque, gratissimum publice declaro atque officiosissimum semper iri servatum a me animum voveo. Cunctis vero, quorum immensae benignitatis gratum, pium, memorem perstaturum me esse polliceor. Faxit Deus O. M., ut largissime contingant omnia, quibuscunque humana inesse censetur felicitas. —

# THESES.

I.

*Lineam analytice esse definiendam hoc modo: esse viam puncti se moventis, non locum geometricum finis lineae ad leges certas se immutantis, et sibi parallele se moventis.*

II.

*Figuras electricas in tabula, quae dicitur Frankliniana, nec Symmeri, nec Franklini sententiam probare.*

III.

*Fulgurationes esse fulgura nimium remota.*

IV.

*In chemiae parte, quae dicitur organica, non in anorganica, tractanda esse „cyanum" et „carburetum hydrogenii in maximo".*

V.

*Diversa tantum alimenta servare posse vitam animantium.*

VI.

*Fabulam esse, quod narratur, Archimedem naves Romanorum scaphiis incendisse.*

VII.

*Linguam latinam ad res mathematicas minus esse aptam.*

VIII.

*Deligatos populi non ad capita, sed ad ordines populi esse eligendos.*